

I. Généralité sur les suites avec : $(u_n)_{n \geq n_0}$ est une suite son premier terme est u_{n_0} : (rappel)

A. Suite majorée – suite minorée – suite bornée : Activité: Ex_3

a. Définitions :

- Une suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ est majorée par un réel M si et seulement si $\forall n \geq n_0; u_n \leq M$ (ou $\forall n \geq n_0; u_n < M$).
- Une suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ est minorée par un réel m si et seulement si $\forall n \geq n_0; u_n \geq m$ (ou $\forall n \geq n_0; u_n > m$).
- Une suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ est bornée si et seulement si $(u_n)_{n \geq n_0}$ est majorée et bornée .
- Une suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ est bornée si et seulement si $\exists A \in \mathbb{R}^+; \forall n \geq n_0; |u_n| \leq A$ ou $(< A)$.

B. La monotonie d'une suite : Activité: Ex_7

Exercice: 4_5_6

a. Définition :

- Une suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ est croissant si et seulement si $\forall n \geq n_0 ; u_n \leq u_{n+1}$.
- Une suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ est strictement croissant si et seulement si $\forall n \geq n_0 ; u_n < u_{n+1}$.
- Une suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ est décroissant si et seulement si $\forall n \geq n_0 ; u_n \geq u_{n+1}$.
- Une suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ est strictement décroissant si et seulement si $\forall n \geq n_0 ; u_n > u_{n+1}$.
- Une suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ est constante si et seulement si $\forall n \geq n_0 ; u_n = u_{n+1}$.
- Une suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ est périodique de période $T \in \mathbb{N}^*$ si et seulement si $\forall n \geq n_0 ; u_{n+T} = u_n$.

II. Suite arithmétique – son terme général – la somme S_n : (rappel)

Exercice: 8_9_10

a. Définition :

- $(u_n)_{n \geq n_0}$ est une suite numérique . r est un nombre réel non nul .
- ❖ La suite (u_n) est arithmétique de raison r et de premier terme u_{n_0} équivaut à $\forall n \geq n_0 : u_{n+1} - u_n = r$.
 (ou encore $\forall n \geq n_0 : u_{n+1} = u_n + r$) .
- ❖ $(u_n)_{n \geq n_0}$ est une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_{n_0} on a :
 $\forall n \geq n_0 : u_n = u_{n_0} + (n - n_0)r$
- ❖ Pour la somme suivante : $S_n = \sum_{i=p}^{i=n} u_i = u_p + u_{p+1} + u_{p+2} + \dots + u_n$ ou a : $S_n = \left[\frac{u_n + u_p}{2} \right] \times (n - p + 1)$.
 $S_n = \frac{(\text{le premier terme}) + (\text{le dernier terme})}{2} \times (\text{le nombre des termes de la somme})$
- ❖ **Propriété caractéristique :** $\forall p \geq n_0 ; \forall q \geq n_0 ; u_q = u_p + (q - p)r$ (avec q et p de $\mathbb{N}$) .
- ❖ Moyenne arithmétique : $u_i = a$ et $u_{i+1} = b$ et $u_{i+2} = c$ trois termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison r on a : $a + b = 2c$

b. Remarque :

- La somme suivante $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$ possède $n + 1$ terme . (c.à.d. $n - 0 + 1$) .
- La somme suivante $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n$ possède n terme . (c.à.d. $n - 1 + 1$) .
- La somme suivante $S_n = u_n + u_{n+1} + u_{n+2} + \dots + u_n$ possède $n + 1$ terme . (c.à.d. $n - n_0 + 1$)

III. Suite géométrique – son terme général – la somme S_n : (rappel)

c. Définition :

$(u_n)_{n \geq n_0}$ est une suite numérique . q est un nombre réel non nul .

- ❖ La suite (u_n) est géométrique de raison q et de premier terme u_{n_0} équivaut à $\forall n \geq n_0 : u_{n+1} = q \times u_n$.
(ou encore $\forall n \geq n_0 : u_{n+1} = u_n + r$) .
- ❖ $(u_n)_{n \geq n_0}$ est une suite géométrique de raison q et de premier terme u_{n_0} on a : $\forall n \geq n_0 : u_n = u_{n_0} \times q^{(n-n_0)}$
- ❖ Pour la somme suivante : $S_n = \sum_{i=p}^{i=n} u_i = u_p + u_{p+1} + u_{p+2} + \dots + u_n$ ou a :
 - Si $q \neq 1$ on a $S_n = \left[\frac{q^{(n-p+1)} - 1}{q - 1} \right] \times u_p$.
 - $q = 1$: $S = \sum_{i=p}^{i=n} u_i = u_p (n - p + 1)$.
- ❖ **Propriété caractéristique** : $\forall p \geq n_0 ; \forall q \geq n_0 : u_q = u_p \times q^{q-p}$ (avec q et p de $\mathbb{N}$) .
- ❖ Moyenne géométrique : $u_i = a$ et $u_{i+1} = b$ et $u_{i+2} = c$ trois termes consécutifs d'une suite géométrique de raison q on a : $a \times c = b^2$

IV. Limites d'une suite numérique : $(n \mapsto +\infty)$

Exercice: 13_14

A. Limite finie d'une suite :

a. Activité :

- ❖ On considère la suite (u_n) définie par : $u_n = \frac{1}{n}$; $n \geq 2$.
- ❖ Sur une droite graduée on présente l'intervalle $I_0 = \left] -\frac{1}{4}, \frac{1}{4} \right[$ de centre 0 avec unité de mesure 2 cm .
- ❖ Calculer quelques termes de la suite et on les place sur la droite graduée , que remarquez-vous ?
- ❖ Si n tend vers $+\infty$, que peut-on dire des termes u_n de la suite ?

b. Vocabulaire :

- On dit que la limite de la suite (u_n) est 0 (zéro) lorsque n tend vers $+\infty$.
- On écrit : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

c. Définition :

$(u_n)_{n \geq n_0}$ est une suite numérique.

On dit que la limite de la suite (u_n) est le nombre réel ℓ si pour tout intervalle ouvert I_ℓ et de centre ℓ contient tous les termes de la suite (u_n) à partir d'un certain rang , on note $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$.

d. Propriété :

- Si une suite a une limite alors cette limite est unique .
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} = 0$ et ; $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^i} = 0$ ($i \in \mathbb{N}^*$) et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$.
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - \ell) = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$.

e. Exemple :

- ❖ On considère la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ définie par : $u_n = \frac{1}{n} + 3$

B. Limite infinie d'une suite :

a. Définition :

$(u_n)_{n \geq n_0}$ est une suite numérique.

- On dit que la limite de la suite (u_n) est $+\infty$ si pour tout A de $\mathbb{R}^+$ l'intervalle $]A, +\infty[$ contient tous les termes de la suite (u_n) à partir d'un certain rang, on note $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.
- On dit que la limite de la suite (u_n) est $-\infty$ si pour tout A de $\mathbb{R}^+$ l'intervalle $]-\infty, A[$ contient tous les termes de la suite (u_n) à partir d'un certain rang, on note $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.

b. Propriété :

- Si une suite a une limite alors cette limite est unique.
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$ et ; $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^i = +\infty$ ($i \in \mathbb{N}^*$) et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = +\infty$.

C. Convergence d'une suite numérique :

a. Définition :

$(u_n)_{n \geq n_0}$ est une suite numérique.

- Si la limite de la suite (u_n) est finie on dit que la suite (u_n) est convergente.
- Si la limite de la suite (u_n) est infinie ou la suite (u_n) n'a pas de limite on dit que la suite (u_n) est divergente.

b. Exemple :

- $u_n = n^4$ on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ d'où la suite (u_n) est divergente.
- $u_n = (-1)^n$ cette suite n'a pas de limite car si n est paire on a $u_n = 1$ et si n est impaire on a $u_n = -1$.

c. Propriété :

- Toute suite croissante et majorée est une suite convergente.
- Toute suite décroissante et minorée est une suite convergente.

d. Exemple :

On considère la suite numérique (u_n) définie par : $u_n = \frac{1}{n^3} + 7$; $n \geq 1$.

- Montrer que la suite (u_n) est minorée.
- Montrer que la suite (u_n) est décroissante.
- En déduit la convergence de la suite (u_n) .

V. Opérations sur les limites des suites :

a. Propriété :

Soient $(u_n)_{n \geq n_0}$ et $(v_n)_{n \geq n_0}$ deux suites numériques.

- Les opérations sur les suites sont les mêmes que les opérations des fonctions.
exemple : $(u_n)_{n \geq n_0} + (v_n)_{n \geq n_0} = (u_n + v_n)_{n \geq n_0}$.
- Les propriétés des opérations des limites des suites sont les mêmes que celles des fonctions.
exemple 1 : si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \ell'$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n + v_n = \ell + \ell'$.
exemple 2 : si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n + v_n = -\infty$.
- si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$ et $u_n > 0$ alors $\ell > 0$.
- si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \ell'$ et $v_n \leq u_n$ alors $\ell' \leq \ell$.

Exercice: 15_16_17

b. application :

1. calculer la limite de la suite suivante : $u_n = \frac{1}{n} + 3 ; n \geq 1$
2. calculer la limite de la suite suivante : $v_n = \left(\frac{1}{n} + 3\right)\sqrt{n} ; n \geq 1$.

VI. Critères de convergences :

a. Critères :

Soient $(u_n)_{n \geq n_0}$ et $(v_n)_{n \geq n_0}$ et $(w_n)_{n \geq n_0}$ trois suites numériques tel que à partir d'un rang p on a pour tout $n \geq p \geq n_0$ (avec $n \in \mathbb{N}$) . $\alpha > 0$ et $\ell \in \mathbb{R}$

1. Si $v_n \leq u_n \leq w_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = \ell$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$.
2. Si $v_n \geq \alpha \cdot u_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$.
3. Si $v_n \leq \alpha \cdot u_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$.
4. Si $|v_n - \ell| \leq \alpha \cdot u_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \ell$.

Exercice: 18_19_17_20_21_22_23_24_25_26

b. Application :

Application 1 : On considère la suite numérique (u_n) définie par : $v_n = \frac{(-1)^n}{n} - 5 ; n > 0$.

1. Montrer que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -5$.

Application 2 : On considère la suite numérique (u_n) définie par : $u_n = 2n + \cos(n) ; n \geq 0$.

1. Calculer : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

Application 3 : On considère la suite numérique (u_n) définie par : $v_n = \frac{\cos n}{n} ; n \geq 1$.

1. Montrer que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$.

c. Exercice :

Calculer : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\cos n}{n^2}$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\cos n + 5}{n^3}$.

VII. Suite de la forme particulières :

A. Suite de la forme : $u_n = q^n$ avec $q \in \mathbb{R}$:

a. Propriété :

- Si $q > 1$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$.
- Si $-1 < q < 1$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$.
- Si $q = 1$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 1$.
- Si $q \leq -1$ alors q^n n'a pas de limite.

b. Exemple :

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} 3^n = +\infty$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^n - 8^n}{7^n}$

Exercice: 29_30

B. Suite de la forme $u_n = n^r$ avec $r \in \mathbb{Q}^*$

a. Propriété :

- Si $r > 0$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^r = +\infty$.
- Si $r < 0$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^r = 0$.

b. Exemple :

Soit la suite (u_n) définie par : $u_n = \sqrt[n]{n^3} ; n \geq 1$. Calculons : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$:

C. Suite $(v_n)_{n \geq n_0}$ de la forme $v_n = f(u_n)$:

a. Activité :

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \frac{2x-5}{7x+4}$ et la suite (u_n) définie par $\left(u_n = \frac{1}{n^3}\right)_{n \geq 1}$.

1. On considère la suite $(v_n)_{n \geq 1}$ définie par : $v_n = f(u_n)$.

- Ecrire la suite (v_n) en fonction du terme u_n .
- En déduit v_n en fonction de n .

2. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$.

3. Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$ en déduit une relation entre $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$ et f et ℓ .

b. Propriété :

Si une suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ converge vers ℓ (c.à.d. $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$) et f est une fonction continue en ℓ alors la suite $(v_n)_{n \geq n_0}$ définie par $v_n = f(u_n)$ est convergente vers $f(\ell)$ (c.à.d. $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = f(\ell)$).

c. Exemple :

Exercice: 27_28

On considère la fonction $f(x) = \frac{5x-6}{x+3}$ et la suite $u_n = \frac{\cos n}{n}$; $n \geq 1$ et la suite $(v_n)_{n \geq 1}$ définie par :

$$v_n = f(u_n).$$

1. Ecrire la suite (v_n) en fonction de n .

2. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

3. On détermine $\lim v_n$

D. Suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$:

a. Définition :

Soit une suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ tel que $\forall n \geq n_0$; $u_{n+1} = f(u_n)$ avec f est une fonction.

Si on a :

- f est une fonction continue sur un intervalle I .

- $f(I) \subset I$.
- $u_{n_0} \in I$ (le premier terme).
- La suite (u_n) est convergente (vers $\ell \in \mathbb{R}$)

Alors ℓ est solution de l'équation $x \in I$, $f(x) = x$ (c.à.d. ℓ vérifie $\ell = f(\ell)$).

b. Exemple :

Exercice: 31_32_33_34_35_36_37_38_39_40

On considère la fonction $f(x) = \sqrt{x+6}$.

1. Donner le tableau de variation de f .

2. On considère l'intervalle $I = [0, 3]$.

- Déterminer $f(I)$.

3. On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \sqrt{6+u_n} \end{cases} ; n \geq 0$

- Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$; $0 \leq u_n \leq 3$
- Montrer que la suite (u_n) est croissante.
- La suite (u_n) est convergente ?
- Ecrire la suite (u_n) en fonction de f et de u_n

4. Déterminer la limite de la suite (u_n) .

Classe :	2Bac.SVT	Devoir Maison N° 2	Prince Moulay Abdellah
Année scolaire	2022/2023	1 ^{er} Semestre	Prof : Rachid BELEMOU

Exercice1 :

On considère la fonction f définie par : $f(x) = x + 2 - 2\sqrt{x-1}$

On note (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$

Partie I :

- 1) Déterminer D_f .
- 2) a) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$
 - b) Montrez que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$ et que $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = -\infty$
 - c) Déduisez la branches infinies de (C_f) .
- 3) a) Etudier la dérivabilité de la fonction f à droite en 1
 - b) Interprétez graphiquement le résultat.
- 4) a) Montrez que $f'(x) = \frac{\sqrt{x-1}-1}{\sqrt{x-1}} \quad \forall x \in]1; +\infty[$
 - b) Etudier les variations de f puis dressez le tableau de variations de f .
- 5) a) Montrer que $f(x) - x = 2(1 - \sqrt{x-1}) \quad \forall x \in]1; +\infty[$
 - b) Etudier la position relative de (C_f) et la droite (D) d'équation $y = x$
- 6) Donner l'équation cartésienne de la tangente (T) à (C_f) au point d'abscisse 2
- 7) Tracez (C_f)

Partie II :

On considère la suite (U_n) définie par
$$\begin{cases} U_0 = 3 \\ U_{n+1} = f(U_n); \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

- 1) Montrer que $U_n > 2 \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- 2) Montrer que (U_n) est décroissante
- 3) Dédurre que (U_n) est convergente et calculer sa limite

Exercice2 :

Soit (U_n) la suite définie par
$$\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = \frac{5U_n}{2U_n + 3}; \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

- 1) montrer que $U_n > 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- 2) a) Vérifier que $U_{n+1} - U_n = \frac{-2U_n(U_n - 1)}{2U_n + 3}$
 - b) Dédurre que (U_n) est décroissante et convergente
- 3) on considère la suite (V_n) définie par $V_n = \frac{U_n - 1}{U_n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$
 - a) montrer que (V_n) est géométrique de raison $q = \frac{3}{5}$
 - b) calculer V_n en fonction de n
 - c) Dédurre U_n en fonction de n
 - d) calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$